数理解析研究所講究録
116巻 1971年 68-87

Very Ample Vector Bundles

京大 理数 隅広秀康

§1. 序

R. Hartshorne [10] によって，line bundles の ampleness の定義及び性質は，一般の vector bundles に迄拡張されました。その後，多くの人々によって（例えば，Hartshorne [11]，Kleiman [8]，Hironaka-Matsumura [12]，Gieseker [5]）ampleness の幾何学的意味付けがいろいろな角度からなされています．例えば，

(1) ample vector bundles の chern classes の numerical positivity.

(2) normal vector bundles が ample のときの closed subscheme の入り方

ここでは，別の幾何学的意味付けとして，

(3) Grassmann variety への埋め込み

という観点から ample vector bundles をみてみることにします．そして，その観点から Hartshorne の問題を考えてみよう

ものです.

<u>Hartshorne の問題</u>: E を non-singular projective algebraic variety X 上の ample vector bundles とするとき, 各 i 次の Chern class $c_i(E)$ $(1 \le i \le \min(\dim X, \operatorname{rank} E))$ は numerically positive か?

以後, 考える schemes はすべて代数的閉体 k 上の algebraic schemes とし, vector bundles は constant rank な locally free sheaves を意味するものとする.

§ 2 Very ample vector bundles.

X を k-algebraic scheme. E を X 上の global sections で生成された $\operatorname{rank} E = r$, $\dim H^0(E) = t$ の vector bundles とする. 次の自然な exact sequence: $0 \longrightarrow \operatorname{Ker}\varphi \longrightarrow \mathcal{O}_X^{\oplus t} \xrightarrow{\varphi} E \longrightarrow 0$ より次の morphism $\bar{\varphi}: X \longrightarrow G_{t,r}$ が得られる.

$$\bar{\varphi}: X \ni x \longmapsto \bar{\varphi}(x) = \operatorname{Ker}\varphi(x) \in G_{t,r}$$

$$G_{t,r} = \{ t \text{ 次元 vector space の codim} = r \text{ の subspaces} \}$$

<u>定義</u> 2.1 上の条件の下で, $\bar{\varphi}$ が immersion のとき, E を <u>very G-ample</u> といい, 一般の vector bundle E に対して, 適当な正整数 N が存在し, $\forall n \ge N$ に対して, $S^n(E)$ が very G-ample のとき, E を <u>G-ample</u> という. 但し $S^n(E)$ は E の n 次の symmetric

tensor product.

例4. 次の例は very G-ample vector bundles の例.

(1) $X = G_{t,r}$, $E = E_{t,r}$: classifying vector bundles.

(2) $X = \mathbb{P}^1$, $E = \mathcal{O}_X(m) \oplus \mathcal{O}_X(n)$ m, n は共には零でない負でない整数.

定義 2.2 (Gieseker [5]) E を X 上の vector bundle. X の任意の closed point x に対して, $\mathfrak{m}_{x,X}$ を x の defining ideal とする. 任意の closed point x に対して, $E \otimes \mathfrak{m}_{x,X}$ が global sections で生成されているとき, E を strongly ample という.

注意 (1) X が complete variety のとき, strongly ample vector bundle は ample vector bundle である. (2) strongly ample vector bundles の chern classes は非常に良い性質を持っている.

定義 2.3 E を X 上の vector bundle とし, L_E を E の tautological line bundle とする. ($f : P(E) \longrightarrow X$ L_E は $P(E)$ 上の line bundle.) L_E が very ample line bundle のとき, E を very ample vector bundle という.

この§2では, 次の3つの定理と, very ample vector bundle の諸性質を示す.

定理 2.1 Very ample vector bundle は very G-ample vector bundle である.

<u>定理</u> 2.2　E を ample vector bundle とする. 適当な正整数 N が存在し, $\forall n \geq N$ に対して, $S^n(E)$ は very ample vector bundle となる.

<u>定理</u> 2.3　Very ample vector bundle は strongly ample vector bundle である.

順を追って証明しよう.

<u>補題</u>　2.1　E を X 上の vector bundle. 次の条件は同値である.

(1)　E が global sections で生成されている.

(2)　L_E が global sections で生成されている.

(証明)　明らか.

<u>定理 2.1 の証明</u>:　E を X 上の $\operatorname{rank} E = r$, $\dim H^0(E) = t$, very ample vector bundle とする. $\{s_1, \ldots, s_t\}$ を $H^0(E)$ の basis とし, $\{s_1', \ldots, s_t'\}$ をそれらに対応する $H^0(L_E)$ の basis とする. (cf. $\forall n \geq 0$ に対して, $R^i f_*(f^*(F) \otimes L_E^n)$

$$= \begin{cases} 0 & i > 0 \\ F \otimes S^n(E) & i = 0 \end{cases}$$

但し, F は X 上の coherent sheaf.)

補題 2.1 より, $\{s_i\}$ ($\{s_i'\}$) は E (又, L_E) を生成する.
$\mathfrak{U} = (U_\alpha)$ を X の open covering s.t. $E|U_\alpha \simeq \mathcal{O}_{U_\alpha}^{\oplus r}$ とする.
$s_i|U_\alpha = (s_i^1, \ldots, s_i^r)$　($s_i^j \in \Gamma(U_\alpha, \mathcal{O}_{U_\alpha})$). U_α の各

closed point x に対して、r 個の vector : $v_1, \dots, v_r$ を次の様に定義する。 $v_1 = \sum_{i=1}^{t} s_1^i(x) e_i, \ \dots, \ v_r = \sum_{i=1}^{t} s_r^i(x) e_i$

$\{v_1, \dots, v_r\}$ は t 次元 vector space ($= \{e_1, \dots, e_t\}$ を basis とする k 上の t 次元 vector space) の r 次元 vector space : $[v_1, v_2, \dots, v_r]$ を生成する。

$$\bar{\varphi}^* : X \ni x \longrightarrow \bar{\varphi}^*(x) = [v_1, \dots, v_r] \in G_{t,t-r}$$

と $\bar{\varphi}^*$ を定義すれば、$\bar{\varphi}^*$ は X から $G_{t,t-r}$ への morphism である。($H^0(E)$ の basis の取り方、及び (U_α) の取り方には無関係。)

$\bar{\varphi}^*$ が immersion であることを示せば良い。($\bar{\varphi}^*$ は定義 2.1 の morphism $\bar{\varphi}$ の dual morphism である。) L_E が $P(E)$ 上 very ample より、$\{s^i\}$ によって定まる morphism $\bar{\Psi}^* : P(E) \longrightarrow \mathbb{P}^{t-1}$ は immersion. 即ち、$f : P(E) \longrightarrow X$ を自然写像とするとき、$f^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbb{P}^{r-1} \ni (x, \xi) = (x, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r) \longrightarrow \bar{\Psi}^*(x, \xi) = \left(\sum_{j=1}^{r} s_j^1(x) \xi^j : \dots : \sum_{j=1}^{r} s_j^t(x) \xi^j \right) \in \mathbb{P}^{t-1}$ が immersion である。一方 $\{ \bar{\Psi}^*(x, \xi) \mid \xi \in \mathbb{P}^{r-1} \}$

$$\begin{tikzcd}
P(E) \arrow[r, "\bar{\Psi}^*"] \arrow[d, "f"] & \mathbb{P}^{t-1} \arrow[d, dashed, leftrightarrow] \\
X \arrow[r, "\bar{\varphi}^*"] & G_{t,t-r}
\end{tikzcd}$$

によって張られる t 次元 vector space の subspace は丁度 r 次元 vector space $\bar{\varphi}^*(x)$ である。故に $\bar{\varphi}^*$ は X 上 injective. 又 $\bar{\Psi}^*$ が immersion であることより、各 U_α 上 $\bar{\varphi}^*$ は immersion である。故に、$\bar{\varphi}^*$ は X 上 immersion である。 q.e.d.

補題 2.2 L を very ample line bundle とする. 任意の正整数 n に対して, $L^{\oplus n}$ は very ample vector bundle である.

(証明) $E = L^{\oplus n}$ とする. $E = (\mathcal{O}_X^{\oplus n}) \otimes L$. 故に適当な isomorphism $\sigma : P(\mathcal{O}_X^{\oplus n}) \xrightarrow{\sim} P(E)$ s.t. $\sigma^*(L_E) \simeq p_1^*(L) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_P(1))$. 但し. $p_1 : X \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow X$, $p_2 : X \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$. $p_1^*(L) \otimes p_2^*(\mathcal{O}_P(1))$ は very ampl であることより, L_E は very ample. q.e.d.

補題 2.3 X を quasi-projective algebraic scheme. E を X 上の vector bundle. 次の条件は同値.

(1) E は ample vector bundle.

(2) X 上の任意の line bundle H に対して, 適当な正整数 N が存在し, $\forall n \geq N$ に対し, $f_n^*(H) \otimes L_{S^n(E)}$ が very ample. 但し, $f_n : P(S^n(E)) \longrightarrow X$

(3) X 上の任意の line bundle H に対して, 適当な正整数 N が存在し, $\forall n \geq N$ に対して, $L_{H \otimes S^n(E)}$ が very ample である.

(証明) (2) 又は (3) から (1) が示せることは良く知られている.

(1) から (2) と (3) を示す. K を X 上の very ample line bundle とする. E が ample より, $\exists N$ s.t. $\forall n \geq N$ に対して, $H \otimes K^{-1} \otimes S^n(E)$ が global sections で生成されている.

$$K^{\oplus t} \longrightarrow H \otimes S^n(E) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

$$\begin{tikzcd}
P(S^n(E)) \arrow[r, "\sim", "\sigma_n"'] \arrow[dr, "f_n"'] & P(H\otimes S^n(E)) \arrow[r, hook, "i_n"'] \arrow[d, "f_n'"] & P(K^{\oplus r}) \\
& X &
\end{tikzcd}$$

i_n : closed immersion.

M を $K^{\oplus r}$ の tautological line bundle とすると、補題 2.2 より、very ample で、$i_n^*(M) = L_{H\otimes S^n(E)}$. 故に、$L_{H\otimes S^n(E)}$ は very ample . 更に、$\sigma_n : P(S^n(E)) \xrightarrow{\sim} P(H\otimes S^n(E))$ は isomorphism で、$\sigma_n^*(L_{H\otimes S^n(E)}) = L_{S^n(E)} \otimes f_n^*(H)$. 故に $f_n^*(H)\otimes L_{S^n(E)}$ は very ample . q.e.d.

故に、補題 2.3 より、<u>定理 2.2 は証明された.</u>

<u>補題</u> 2.4 E を X 上の vector bundle , $r = \operatorname{rank} E$ とする. 次の条件は同値である.

(1) E は strongly ample vector bundle

(2) X の任意の相異なる 2 つの closed point x, y に対して $H^0(E)$ の元で x で零になるものが、y 上で r 次元の vector space を生成する.

(証明) (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\quad 0 \to m_{x,X} \to \mathcal{O}_X \to k(x) \to 0$

$$0 \to E\otimes m_{x,X} \to E \to E\otimes k(x) \to 0$$

$$0 \to H^0(E\otimes m_{x,X}) \to H^0(E) \to H^0(E\otimes k(x)) \to \cdots \quad \text{(exact)}$$

$E\otimes m_{x,X}$ が global sections で生成されることと，$\forall y\in X$ に対して，

$$(E\otimes m_{x,X})_y \underset{\mathcal{O}_y}{\otimes} \mathcal{O}_y/m_y = \begin{cases} 0 & y=x \\ k(y)^{\oplus r} & y\neq x \end{cases}$$

が $E\otimes m_{x,X}$ の global sections で生成されることは同値．

（中山の補題）　q.e.d.

<u>定理 2.3 の証明</u>　$r=\mathrm{rank}\,E$，$t=\dim H^0(E)$．$\{s_1,\dots,s_t\}$ を $H^0(E)$ の basis．それに対応する $H^0(L_E)$ の basis を $\{s_1',\dots,s_t'\}$ とする．x,y を X の相異なる 2つの closed point とする．

$V_x=\{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_t) \mid \sum \alpha_i s_i'(x)=0\}$

$V_y=\{\beta=(\beta_1,\dots,\beta_t) \mid \sum \beta_i s_i'(y)=0\}$ とおく．

L_E が very ample より，$V_x^*=\overline{W}_x$，$V_y^*=\overline{W}_y$（但し，$*$ は dual space を取ることを意味する．）とすると，$\dim(\overline{W}_x\cap\overline{W}_y)=0$．故に，$\dim(V_x\cap V_y)=\dim V_x - r$．補題 2.4 により，$E$ は strongly ample である．

q.e.d.

次に very ample vector bundles の持っている ―― な性質を示そう．

<u>定理</u> 2.4　(1)　very ample vector bundle の quotient

vector bundle は very ample.

(2) very ample vector bundles の直和は very ample.

(証明) (1)は明らか. (2)は定理 2.1 で利用した方法により証明出来る. q.e.d.

<u>定理</u> 2.5 E を X 上の very ample vector bundle とする. $p = \mathrm{char}\, k$.

(1) $p=0$ のとき: E の任意の positive tensor bundle (cf. Hartshorne [10]) は very ample.

(2) $p>0$ のとき: 任意の正整数 n に対して, $E^{\otimes n}$, $S^n(E)$, $\wedge^n E$ (このときは, $1 \le n \le \mathrm{rank}\, E$) は very ample.

(証明) 定理 2.4 より (2)は明らか. $p=0$ のとき. $GL(n)$ は完全可約群であるから, $GL(n)$ の表現の既約成分はすべて直和因子である. 一方, $GL(n)$ の任意の既約表現は, $S^{n_1}(E)\otimes\cdots\otimes S^{n_r}(E)$ の形の既約表現と同値. 故に $p=0$ のときは, $S^n(E)$ が very ample, $E\otimes E'$ が very ample (E, E' が very ample として) より, 任意の positive tensor bundle は very ample である. q.e.d.

<u>系</u> 2.1 X を quasi-projective algebraic scheme. L を X 上の very ample invertible sheaf とする. E を X 上の任意の vector bundle とするとき, 適当な正整数 N が存在し, $\forall n \ge N$ に対して, $E\otimes L^n$ は very ample である.

(証明) 定理 2.4 と Serre の定理 q.e.d.

§2を終わるにあたって，今迄良く解かっていない所を問題として提起しておきます．

<u>問題</u> 1 (中井の判定法) X を proper な algebraic scheme, E を X 上の vector bundle. 次の条件は同値か？

(1) E が G-ample.

(2) X 上の $\dim \operatorname{Supp} F \geq 1$ である coherent sheaf F に対し，
$\chi(F \otimes S^n(E)) = \sum (-1)^i \dim H^i(F \otimes S^n(E)) \to \infty$
$(n \to \infty)$

<u>問題</u> 2 (西の定理) X を k 上の abelian scheme. E を rank $= r$ の ample vector bundle. 適当な正整数 $N = N(r)$ が存在し，$\forall n \geq N$ に対して，$S^n(E)$ は very ample か？

<u>問題</u> 3 E を very ample vector bundle. k の標数に関係なく，E の positive tensor bundle は very ample か？

§3 <u>Chern classes</u> と <u>Schubert cycles.</u>

以後 X は k 上の non-singular quasi-projective algebraic variety とする．E を X 上の rank $E = r$ の vector bundle とすれば，$1 \leq {}^\forall i \leq \min(r, \dim X)$ に対して，E には Chern ring 係数の Chern classes $c_i(E)$ を対応させることが出来る．(cf. Grothendieck [6]) E が ample vector bundle のとき各 $\{c_i(E)\}$ は numerically positive か？ (cf. Kleiman [9])

<u>補題</u> 3.1 $Y_1, \ldots, Y_r$ を Z（整数環）上の r 個の独立変数とし，各 i $(1 \leq i \leq r)$ に対して，$S_i(Y)$ を i 次の基本対称式とする．このとき，各 k $(1 \leq k \leq r)$ に対して，

$$L_k - s_1 L_{k-1} + \cdots\cdots + (-1)^k s_k = 0$$

を満足する $Y_1, \ldots, Y_r$ に関して対称な多項式の組 $(L_0, L_1, \ldots, L_r)$ が唯一つ存在する．但し $L_0 = 1$ とする．

（証明） r についての帰納法．

故に，各 L_k は $Y_1, \ldots, Y_r$ の基本対称式 $(S_i(Y))$ の多項式 Φ_k で示せる．即ち，$L_k(Y) = \Phi_k(S_i(Y))$．

<u>定義</u> 3.1 E を X 上の vector bundle．

(1) $\Phi_k(E) = \Phi_k(c_1(E), \ldots, c_r(E))$ $\quad (1 \leq k \leq r)$

と定義する．

(2) $I = (i_1, \ldots, i_r)$ を r 個の負でない整数とするとき，

$c^I(E) = c_1^{i_1}(E) \cdots c_r^{i_r}(E)$ で定義する．

今迄に得られた結果の中で最も良いものは次の結果である．

定理 3.1 (Gieseker [5])

(1) E が X 上の ample vector bundle ならば、任意の k $(1 \leq k \leq \min(r, \dim X))$ に対して、$c_k(E)$ は numerically positive である。

(2) E が X 上の strongly ample vector bundle ならば、$c^I(E)$ $(I=(i_1,\dots,i_r)$ 各 i_j は負でない整数$)$ は numerically positive である。

注意 Analytic case においては、P. A. Griffiths の一連の仕事が有り、定理 3.1 よりも詳しい結果が得られている。

E を X 上の very ample vector bundle とする。$r = \operatorname{rank} E$, $t = \dim H^0(E)$. このとき、§2 で定義した様に、$\exists \varphi : X \longrightarrow G_{t,r}$ morphism が存在する。$E_{t,r}$ で $G_{t,r}$ の classifying vector bundle を表わせば、$E = \varphi^{-1}(E_{t,r})$. 各 chern classes は、$c_i(E) = \varphi^{-1}(c_i(E_{t,r}))$. 故に $c_i(E)$ が numerically positive かどうかを知るには、まず $c_i(E_{t,r})$ を調べる必要が有る。Fogarty and Rim [4] の Serre sequence の理論を応用することにより、classifying vector bundle の chern classes は Schubert cycles : $\Omega_{a_1,\dots,a_{t-r}}$ で書き表わされる。(cf. Hodge and Pedoe [13]) 但し、Schubert cycle $\Omega_{a_1,\dots,a_{t-r}}$ は

Schubert condition : $1 \le a_1 < a_2 < \cdots < a_{t-r} \le t$ によって決まる 次元 $= \sum_{i=1}^{t-r} a_i - \frac{(t-r)(t-r+1)}{2}$ の $G_{t,r}$ の closed irreducible subvariety である.

<u>定理</u> 3.2 Grassmann variety $G = G_{t,r}$ の classifying vector bundle $F = F_{t,r}$ の Chern classes は次の通りである.

(1) $r = t-1$ $\qquad c_i(F) = \Omega_{t-i} \quad (1 \le i \le t-1)$

(2) $1 \le r \le t-2$ $\qquad c_i(F) = \Omega_{r-i+1,\, r+2,\, \ldots,\, t} \quad (1 \le i \le r)$

(証明) Fogarty and Rim [4] を応用して, 実際に, 計算をして行けば良い. ただし, 計算がはん雑になるので省略することにします. (cf. S. Chern [3])

<u>定理</u> 3.3 定理 3.2 の条件の下で, $\Phi_k(F)$ を求めると次の様になる.

(1) $r = t-1$ $\qquad \Phi_1 = c_1 = \Omega_1, \quad \Phi_k = 0 \quad (2 \le k \le t-1)$

(2) (i) $k \ge t-r+1$ $\qquad \Phi_k = 0$

(ii) $k = t-r$ $\qquad \Phi_k = \Omega_{r,\, r+1,\, \ldots,\, t-1}$

(iii) $k \le t-r-1$ $\qquad \Phi_k = \Omega_{r,\, r+1,\, \ldots,\, \underset{k\text{番目}}{r+(k-1)},\, \underset{(k+1)\text{番目}}{r+(k+1)},\, \ldots,\, t}$

(証明) (1) は明らか. (2) の (iii) について: k についての帰納法と Pieri の公式を利用. (2) の (i) について,

$k=t-r+i\ (i\geq 1)$ として，i についての帰納法と Pieri の公式を利用する．　q.e.d.

系 3.1　X を non-singular projective variety，$L=O_X(1)$ を X 上の very ample line bundle とする．E を X 上の任意の vector bundle とし，$E\otimes L^n=E(n)$ が very ample となる様な n を取る．このとき，$1\leq {}^\forall k\leq \min(\dim X, \operatorname{rank} E)$ に対して，

$$c_k(E)=X\cdot\left(\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}c_{k-i}(E_{c,r})\cdot\xi^{ni}\right)$$

但し，　$c=\dim H^0(E(n))$

ξ : L の first chern class

$\cdot$: intersection product

$r=\operatorname{rank} E$

つまり，X 上の任意の vector bundle の chern classes は Schubert cycles Ω_a，ξ 等で書き表わされる．

系 3.2　E を X 上の ample かつ，very G-ample な vector bundle とすれば，　$\dim H^0(X,E)\geq \operatorname{rank} E+\dim X$.

（証明）　定理 3.1 と定理 3.3 を利用する．　q.e.d.

定理 3.2，定理 3.3 を利用して，Hartshorne の問題への近似をはかるには，次の一連の問題が解かれなければならない．これらは，それだけで興味有る問題である．

問題4　X を s 次元の $G_{t,r}$ の closed irreducible subvariety. 次の条件は同値か？

(1)　$E_{t,r}|X$ が ample vector bundle.

(2)　$X \sim \lambda\Omega_{12\cdots t-r-1,\, t-r+s,\cdots} + \cdots\cdots$　但し $\lambda \neq 0$
と X が書き表わせる　但し ～ は rationally equivalence.

問題5　X を n 次元 non-singular projective variety，T_X を X の tangent vector bundle とする．Y を X の closed irreducible subvariety．もし，T_X/Y が Y 上の ample な vector bundle ならば，Y は X の中にどの様な形で入っていますか？（勿論，Hironaka-Matsumura [12] での G2 type で入っていることは明らか．）更に T_X 自身が ample のとき，X は P^n と同型か？

問題4 が解ければ，最初に述べた Hartshorne の問題に対して，E が ample であり，かつ very G-ample のときには，肯定的な答が与えられる．しかし，今の所，問題4と関連している問題5の様な物でも解かれていない．

§4 Non-singular complete curves 上の ample vector bundles ($p = \mathrm{char}\, k > 0$)

R. Hartshorne が東大での講演で述べていることを稼ぐ，

$p = \mathrm{char}\, k > 0$ のとき，complete non-singular curve X 上の

ample vector bundles の判定法は無いか？

X を genus g の non-singular complete curve，E を X 上の

vector bundle とする。

定義 4.1 (Barton [2])

$$d_0(E) = \min_{L} \{ \deg L \mid L \text{ は } E \text{ の quotient line bundle} \}$$

$d_0(E)$ が有限で有ることは，Atiyah [1] の maximal splitting の理論を利用すれば良い。

定理 4.2 E を X 上の vector bundle．次の条件は同値である

(1) E が ample.

(2) 適当な正整数 N が存在し，$\forall n \geq N$ に対して，

$$d_0(E^{(p^n)}) > \min\{0, 2(g-1)\}$$

但し．$E^{(p^n)}$ は E の n 次の Frobenius endomorphism の inverse image.

注意 $g = 0$ のときには，明らかに，$d_0(E) > 0$ で E は ample になる．$g = 1$ のときは，小田 [14] により，$d_0(E) > 0$ で E は ample になる．

補題 4.1 $0 = E_0 \subset E_1 \subset \cdots \subset E_r = E$，$E_i/E_{i-1} = L_i$

$(L_1, \ldots L_r)$ を E の maximal splitting とする

このとき、 $\dfrac{\deg E_{r-1}}{r-1} + rg \geq \deg L_r \quad (r \geq 2)$

（証明） Atiyah [1] を利用。 q.e.d.

<u>定理4.2の証明</u>：(1)→(2) は明らかであるから、(2)→(1) を示せば良い。$r = \operatorname{rank} E$ とし、r について帰納法で示す。$r=1$ ならば明らか。もし適当な正整数 n で $E^{(p^n)}$ が decomposable ならば、帰納法の仮定で、$E^{(p^n)}$ が ample. 故に E は ample である。どの正整数 n に対しても、$E^{(p^n)}$ は indecomposable とする。

$$0 = E_0(n) \subset E_1(n) \subset \cdots\cdots \subset E_r(n) = E^{(p^n)}$$

$$E_i(n)/E_{i-1}(n) = L_i(n)$$

$(L_1(n), \dots, L_n(n))$: $E^{(p^n)}$ の maximal splitting とする。
もし、適当な正整数 n で、$\deg L_n(n) > 2rg$ ならば、$\deg L_i(n) > 0 \quad (1 \leq {}^{\forall} i \leq r)$ となり、$E^{(p^n)}$ は ample.
故に、すべての n に対して、$\deg L_n(n) \leq 2rg$ とする。

$$\frac{\deg E_{r-1}(n)}{r-1} + rg \geq \deg L_r(n)$$

$$\deg E_{r-1}(n) + \deg L_n(n) = p^n \cdot \deg E$$

$$0 < \deg L_r(n) \leq 2rg$$

より、$\deg E \geq 0$. もし $\deg E > 0$ ならば、$\deg E^{(p^n)} = p^n \cdot \deg E$ より、$\deg E^{(p^n)} >> 0 \quad (n >> 0)$. 故に Atiyah [1] nより; $E^{(p^n)}$ は ample. $\deg E = 0$ と仮定して矛盾を示す

$\deg E = 0$ より, $g \geq 2$. (Atiyah [1]) $E^{(p^n)}/L_1(n) = E'(n)$ とすると, 帰納法の仮定より, $E'(n)$ は ample. 故に $\deg L_1(n) < 0$. $L_1(n)$ は $E^{(p^n)}$ の maximal degree の subline bundle より, すべての n に対して, $H^0(X, E^{(p^n)}) = 0$. 故に, R-R 定理より, $\dim H^1(X, E^{(p^n)}) = r(g-1)$. $\dim H^0(X, \check{E}^{(p^n)} \otimes K_X) > 0$. K_X は X 上の canonical line bundle. 故に適当な $\check{E}^{(p^n)} \otimes K_X$ の subline bundle H が, $\deg H \geq 0$ が存在する. $E' = \check{E}^{(p^n)} \otimes K_X / H$ とすると,

$$0 \longrightarrow \check{E}' \otimes K_X \longrightarrow E^{(p^n)} \longrightarrow \check{H} \otimes K_X \longrightarrow 0$$

故に, $d_0(E^{(p^n)}) \leq \deg K_X - \deg H \leq 2(g-1)$. 矛盾.

q.e.d.

Bibliography.

[1] F. Atiyah; Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc. Vol 7. 1957

(2) C. Barton; Contributions to the theory of ample vector bundles, Thesis (Columbia)

[3] S. Chern; Characteristic classes of hermitian manifold, Annals of Math. Vol 47 1946

[4] J. Fogarty and D. Rim ; Serre sequences and Chern classes , Journal of Algebra 10. 1968.

(5) D. Gieseker ; Contributions to the theory of positive embeddings in algebraic geometry , Thesis (Harvard.)

[6] A. Grothendieck ; La théorie des classes de Chern , Bull. Soc. Math. France 86. 1958

[7] A. Grothendieck ; E.G.A. I. II. III.

[8] S. Kleiman ; Ample vector bundles on algebraic surfaces , Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 20-II. 1969.

(9) S. Kleiman ; Toward a numerical theory of ampleness , Annals of Math, Vol 84 1966.

[10] R. Hartshorne ; Ample Vector bundles , I.H.E.S. No 29.

[11] R. Hartshorne ; Cohomological dimension of algebraic varieties , Annals of Math. Vol 88 1968.

[12] H. Hironaka and H. Matsumura ; Formal functions and Formal imbeddings. , Jour. of

Jap. Math. Soc. Vol 20. 1968

[13] W. Hodge and D. Pedoe ; Methods of Algebraic geometry I, II, Cambridge Univ. press. 1952.

[14] T. Oda ; Vector bundles on an elliptic curve (to appear.)